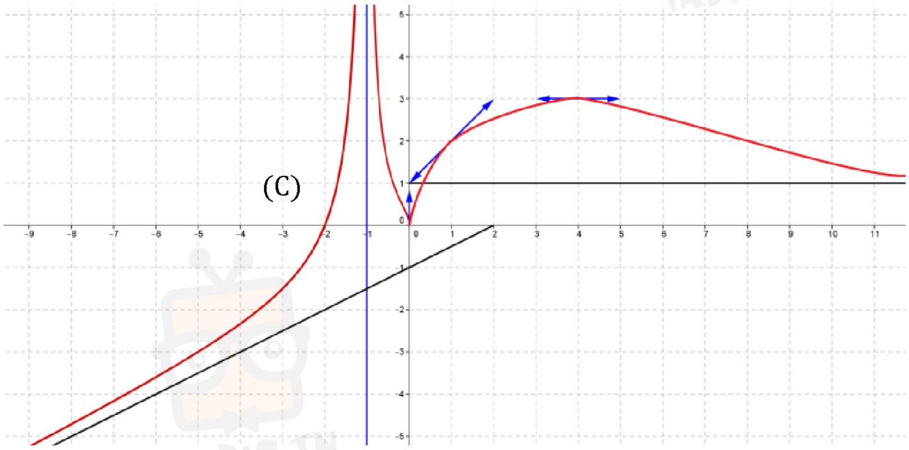
Mathématiques			
3 ème Math		Durée : 120 minutes	

Exercice N°:1 (4 points)



Le graphique ci-contre est la représentation graphique dans un repère orthonormé.

(C) admet trois asymptotes d'équations respectives $x = -1$, $y = 1$ et $y = \frac{x}{2} - 1$.

1) Par lecture graphique déterminer :

a) Les domaines de définition et de dérivabilité de f.

b) $f'(1)$ et $f'(4)$.

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - \frac{x}{2}$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Déterminer en justifiant

a) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{f(x)}$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{2f(x)-x+2}$; c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)+x^2+2x}{x^2+1}$ et d) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{f^2(x)-3f(x)+2}$

Exercice N°:2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[-2,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{4-x^2} & \text{si } x \in [-2,2] \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} - x + m & \text{si } x \in\ ]2,+\infty[\end{cases}$

où m est un paramètre réel.

1) Montrer que f est continue en 2 si et seulement si $m = 2$.

Dans la suite de l'exercice on prend $m = 2$.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en -2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+x$ et interpréter le résultat obtenu.

4) Justifier que f est dérivable sur chacun des intervalles$]-2,2[$ et $]2,+\infty[$.

5) Soit M (a, f(a)) ∈ (C_f) où a ∈ $[-2,2]$ et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

a) Montrer que M appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

b)Déterminer alors une équation cartésienne de la tangente à (C_f) au points d'abscisse1

c) Construire la partie de (C_f) sur $[-2,2]$ en précisant les deux demi-tangentes aux points d'abscisses -2 et 2.

Exercice N°:3 (5 points)

Dans un plan orienté, muni d'un repère $\Re$ orthonormé direct$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On désigne par ζle cercle trigonométrique et par ζ'le cercle de centre O et de rayon 2.

soit $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; On considère les points A, B et C tels que.

B $\in\zeta'$ et $\left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \alpha[2\pi]$, A $\in\zeta$et $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}}\right) \equiv 2\alpha[2\pi]$ et C le point tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

1)a) Donner les coordonnées polaires des points A et B

b) Déterminer les coordonnées cartésiennes des points A, B et C

2) Déterminer α tel que O, A et B sont alignés.

3) a) Montrer que $AB^2=9-8\cos^2\alpha$

b) Déterminer alors α pour que OABC soit un rectangle.

4)Dans la suite de l'exercice $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\mathcal{A}(\alpha)$ désigne l'aire du parallélogramme OABC

a) Montrer que $\mathcal{A}(\alpha) = 2\sin(2\alpha)$

b) pour quelle valeur de α on a $\mathcal{A}(\alpha)$ est maximale.

c) Pour $\alpha=\frac{\pi}{4}$ Placer les points A, B et C dans le repère $\Re$.

Exercice N°:4(5 points)

Soit x un réel, on pose $A(x) = cos(2x) - \frac{1}{2}$

1)a) Montrer que pour tout réels a et b on a : $2\sin a\,\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

b)En déduire que pour tout réel x, on a ; $A(x) = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

c) Calculer $A\left(-\frac{\pi}{12}\right)$, en dèduire que $sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

d)Résoudre dans $[0, \pi]$, l'équation: $2A(x) + 1 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

2) On pose $B(x) = \frac{sin(2x) - 2\sqrt{3}\,sin^2(x)}{2\,cos(2x) - 1}$

a) Déterminer l'ensemble E des valeurs de x pour que $B(x)$ existe

b) Montrer que pour tout réel de E , on a : $B(x) = \frac{sin(x)}{sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

c)Résoudre dans $[0, \pi]$,l'équation $B(x) = 1$